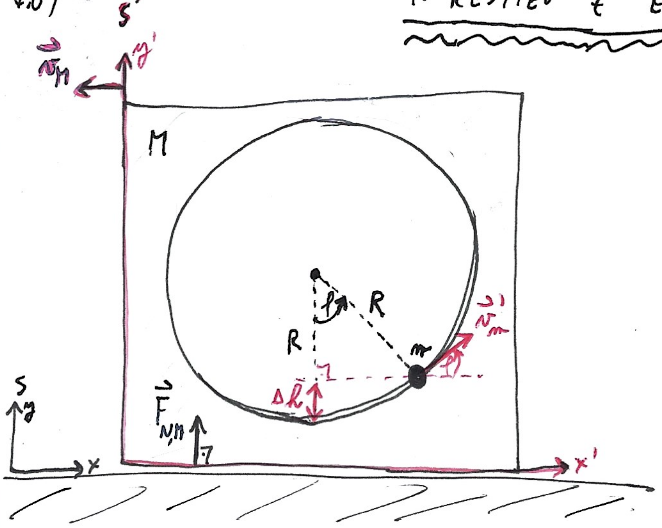
7.6)

1. REŠITEV Z ENERGIJO S PRIBLIŽKI LE NA KONCU.



• VELIKOST HITROSTI KLADE (MASE m) V POSPEŠENEM SISTEMU S', KI JE PRIPET NA KLANEC (MASE M):

$$v_m' = R\cdot\frac{d\varphi}{dt} = R\cdot\dot\varphi$$

• VEKTOR HITROSTI KLADE V SISTEMU S':

$$\vec v_m' = v_m'\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

• VEKTOR HITROSTI KLANCA V LABORATORIJSKEM (INERCIALNEM) SISTEMU S:

$$\vec v_M = (v_M, 0)$$

• VEKTOR HITROSTI KLADE V SISTEMU S:

$$(v_{m,x}, v_{m,y}) \equiv \vec v_m = \vec v_m' + \vec v_M = (v_M + R\dot\varphi\cos\varphi,\ R\dot\varphi\sin\varphi)$$

PREDZNAKI:
- KO $\varphi>0$ JE KLADA DESNO
- KO $v_{m,x}^{(')}>0$ SE KLADA PREMIKA DESNO
- KO $v_M>0$ SE KLANEC PREMIKA DESNO

• VELJA OHRANITEV GIB. KOL. V x SMERI (KER JE EDINA ZUNANJA SILA NA SISTEM KLADA + KLANEC LE NORMALNA SILA PODLAGE, $\vec F_{N,M}$, KI PA KAŽE V VERTIKALNI SMERI):

$$G_x = konst. = 0$$

; ... (TU IMPLICITNO PREDPOSTAVIMO, DA ZAČNEMO IZ STANJA, KJER VSE MIRUJE, LE KLADA JE IZMAKNJENA NA $\varphi_0 \neq 0$)

$$m\cdot v_{m,x} + M\cdot v_{M,x} = 0$$

$$m\cdot(v_M + R\dot\varphi\cos\varphi) + M\cdot v_M = 0$$

$$\boxed{v_M = -\frac{m}{m+M}\cdot R\dot\varphi\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{m,x} = -\frac{M}{m}\cdot v_M = +\frac{M}{m+M}\cdot R\dot\varphi\cos\varphi}$$

• OD PREJ PA ŠE: $\boxed{v_{m,y} = R\dot\varphi\sin\varphi}$

(VSE HITROSTI SMO IZRAZILI Z ENO KOLIČINO: $\dot\varphi$ ✓)

• KER NI TRENJA SE OHRANJA ENERGIJA:

$$W = W_k + W_p = konst.$$

V INERC. SIST. S (NE PA V POSP. SIST. S' !!!)

• KINETIČNA ENERGIJA:

$$W_k = \frac12 m \underbrace{v_m^2}_{(=v_{m,x}^2 + v_{m,y}^2)} + \frac12 M v_M^2 =$$

$$= \frac12 R^2\dot\varphi^2\cdot\left[m\cdot\left(\frac{M^2}{(m+M)^2}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + M\cdot\frac{m^2}{(m+M)^2}\cos^2\varphi\right] =$$

$$= \frac12 R^2\dot\varphi^2\cdot\left[\frac{\cos^2\varphi}{\frac1m + \frac1M} + m\sin^2\varphi\right]$$

• POTENCIALNA ENERGIJA:

$W_p = mg\,\Delta h$; $\Delta h = R(1-\cos\varphi)$

$$W_p = mgR(1-\cos\varphi)$$

• TOREJ:

$$\boxed{konst. = W = \frac12 R^2\dot\varphi^2\cdot\left[\frac{\cos^2\varphi}{\frac1m + \frac1M} + m\sin^2\varphi\right] + mgR(1-\cos\varphi)}\ (!)$$

• IŠČEMO REŠITVE V PRIBLIŽKU MALIH KOTOV $|\varphi| \ll 1$. POSEBEJ, IŠČEMO HARMONIČNO NIHANJE, KJER VELJA:

$$\boxed{\dot\varphi^2 + \omega_0^2\varphi^2 = konst.}$$

DOKAZ:

$$\dot\varphi^2 + \omega_0^2\varphi^2 = konst.$$

$$\Updownarrow \ /\frac{d}{dt}$$

$$2\dot\varphi\cdot\ddot\varphi + \omega_0^2\cdot 2\varphi\cdot\dot\varphi = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\ddot\varphi + \omega_0^2\cdot\varphi = 0$$

(ENAČBA ZA HARM. NIHANJE ✓)

• RAZVITI BO TOREJ ENERGIJO $W = konst.$ LE DO KVADRATNIH ČLENOV V φ & $\dot\varphi$, VIŠJE POTENCE PA ZAVREČI, SAJ SO VELIKO MANJŠE ZA $|\varphi| \ll 1$!

• UPORABIMO TAYLORJEVA RAZVOJA:

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

(ZA ŠE VIŠJI REDI:

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \ldots$$

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots)$$

↓.

• TAKO:

$$\text{konst.} = W = \frac{1}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 \cdot \underbrace{\left[\frac{\cos^2\varphi}{\frac{1}{m}+\frac{1}{M}} + m\sin^2\varphi\right]}_{\left(\approx \frac{1-\frac{\varphi^2}{2}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{M}} + m\varphi^2 = \frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{M}} + \frac{m(2m+M)}{2(m+M)}\cdot\varphi^2\right)} + mgR\underbrace{(1-\cos\varphi)}_{\left(\approx \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{\varphi^2}{2}\right) = +\frac{\varphi^2}{2}\right)}$$

⇓

$$\text{konst.} = W \approx \underbrace{\frac{R^2}{2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}\cdot\dot{\varphi}^2}_{(2.\ \text{RED})\ \checkmark} \gg \underbrace{\underbrace{\frac{m(2m+M)}{4(m+M)}\cdot\dot{\varphi}^2\varphi^2}_{(4.\ \text{RED})}}_{(\approx 0\ !,\ \text{KER JE VEČ KOT 2. RED !})} \ll \underbrace{\frac{mgR}{2}\cdot\varphi^2}_{(2.\ \text{RED})\ \checkmark}$$

⇓

$$\text{konst.} = W \approx \frac{R^2}{2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}\cdot\dot{\varphi}^2 + \frac{mgR}{2}\cdot\varphi^2$$

$$\downarrow \quad / \cdot \frac{2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}{R^2}$$

$$\text{konst.} \equiv \frac{2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)W}{R^2} \equiv \dot{\varphi}^2 + \underbrace{\frac{mg\cancel{R}\cdot\cancel{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}{\cancel{2}\cdot R^{\cancel{2}}}}_{(\equiv \omega_0^2)}\cdot\varphi^2$$

$\sqrt{\ }$

$$\left(\frac{2\pi}{t_0} \equiv\right) \omega_0 \cong \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)\cdot\frac{g}{R}} \Rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \cong \frac{2\pi}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)\cdot\frac{g}{R}}} \checkmark$$

• OPOMBA: LAHKO BI ŽE PREJ RAZVILI KOMPONENTE HITROSTI DO 1. REDA V φ & $\dot{\varphi}$, SAJ VEMO, DA BODO V ENERGIJI NASTOPALI V KVADRATU, IN DA BODO TAKO VIŠJI OD 1. REDA V HITROSTI VODILI DO VIŠJIH OD 2. REDA V ENERGIJI (KER HITROSTI NIMAJO KONSTANTNEGA ČLENA [=0. REDA])

[SAJ: $(\underbrace{a\cdot\varphi}_{1.\ \text{RED}} \gg \underbrace{b\cdot\varphi^2}_{2.\ \text{RED}} \gg \ldots)^2 = \underbrace{a^2\varphi^2}_{2.\ \text{RED}} \gg \underbrace{ab\cdot\varphi^3}_{3.\ \text{RED}} \gg \underbrace{b^2\varphi^4}_{4.\ \text{RED}} + \ldots$]

↓

TOREJ:

$$v_{m,x} = +\frac{M}{m+M}\cdot\underbrace{R\dot{\varphi}}_{\text{ŽE 1. RED}}\cdot\underbrace{\cos\varphi}_{(\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}+\ldots)} \approx +\frac{M}{m+M}\cdot R(\underbrace{\dot{\varphi}}_{1.\ \text{RED}} \gg \underbrace{-\frac{\dot{\varphi}\varphi^2}{2}}_{\substack{3.\ \text{RED}\\(\approx 0)}} + \ldots) \approx +\frac{M}{m+M}\cdot R\dot{\varphi}$$

$$v_{m,y} = R\dot{\varphi}\underbrace{\sin\varphi}_{(\approx\varphi)} \approx 0 + \underbrace{R\cdot\dot{\varphi}\varphi}_{\substack{2.\ \text{RED}\\(\approx 0)}} \approx 0$$

$$v_M = -\frac{m}{M}\cdot v_{m,x} \approx -\frac{m}{m+M}\cdot R\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow W_K = \frac{1}{2}m v_m^2 + \frac{1}{2}M v_M^2 \approx \frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}^2\cdot\frac{mM\cancel{(m+M)}}{(m+M)^{\cancel{2}}} = \frac{R^2}{2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}\cdot\dot{\varphi}^2 \checkmark$$